

# Список питань до колоквиуму з математичного аналізу для студентів 2МФІ, 2МІА

лектор - проф. Г.М. Торбін

III семестр, 2013/2014 навчальний рік

1. Поняття числового ряду. Збіжні та розбіжні числові ряди: означення та приклади. Необхідна умова збіжності числового ряду. Гармонічний ряд.
2. Знакододатні ряди. Критерій збіжності знакододатного ряду. Ознаки збіжності знакододатних рядів (ознака порівняння, гранична ознака порівняння, ознака Даламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші, ознака Раабе ...)
3. Знакопочережні ряди. Теорема Лейбніца та її застосування для наближеного обчислення сум знакопочережних рядів. Абсолютно та умовно збіжні ряди: означення та приклади.
4. Поняття нескінченного числового добутку. Збіжні та розбіжні нескінченні добутки: означення та приклади. Необхідна умова збіжності нескінченного добутку. Зв'язок нескінченних добутків з рядами.
5. Нескінченний добуток виду  $\prod(1 + a_k)$ , (де  $a_k > 0$ ) та критерій його збіжності. Приклад одного збіжного та одного розбіжного нескінченного добутку виду  $\prod(1 + a_k)$ , (де  $a_k > 0$ ).
6. Нескінченний добуток виду  $\prod(1 - b_k)$ , (де  $0 < b_k < 1$ ) та критерій його збіжності. приклад одного збіжного та одного розбіжного нескінченного добутку виду  $\prod(1 - b_k)$ , (де  $0 < b_k < 1$ ).
7. Функціональні послідовності. поточкова збіжність та рівномірна збіжність функціональних послідовностей. Приклади рівномірно збіжних та нерівномірно збіжних функціональних послідовностей.
8. Функціональні ряди. Область збіжності функціонального ряду. Приклади. Рівномірна збіжність функціональних рядів. Приклади рівномірно збіжних та нерівномірно збіжних функціональних рядів. Ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.
9. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів. Теорема про неперервність суми рівномірно збіжного ряду неперервних функцій.
10. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів. Теорема про почленне інтегрування рівномірно збіжного ряду неперервних функцій. Теорема про почленне інтегрування рівномірно збіжного ряду інтегровних за Ріманом функцій.
11. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів. Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.
12. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду. приклади.
13. Властивості суми степеневого ряду.
14. Про можливість представлення функції у вигляді суми степеневого ряду. Ряд Тейлора. Коефіцієнти Тейлора. Контрприклад Коші.
15. Збіжність рядів Тейлора. Критерій можливості представлення функції у вигляді суми степеневого ряду. Достатня умова можливості представлення функції у вигляді суми степеневого ряду. приклади.
16. Розклад елементарних функцій у ряд Тейлора (з обґрунтуванням збіжності формально побудованих рядів Тейлора до заданих функцій).
17. Застосування рядів Тейлора до наближених обчислень значень тригонометричних функцій, числа  $e$ , значень логарифмічної функції, значень коренів. Приклади.
18. Застосування рядів Тейлора до наближених обчислень визначених інтегралів. Приклади.
19. Застосування рядів Тейлора до знаходження сум числових рядів. Приклади.

20. Поняття ортогональної системи функцій. Ортогональність системи функцій  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  на  $[-\pi; \pi]$ .
21. Поняття тригонометричного ряду і ряду Фур'є, коефіцієнти Фур'є рівномірно збіжного на  $[-\pi; \pi]$  ряду, єдиність розкладу у тригонометричний ряд. Приклади.
22. Проблема збіжності формально побудованих рядів Фур'є. про можливість розбіжності в деяких точках ряду Фур'є неперервних функцій (контрприклад Фейєра). Збіжність ряду Фур'є кусково-диференційовної функції.
23. Ряди Фур'є парних та непарних функцій. приклади розкладу кусково-диференційовних на  $[-\pi; \pi]$  функцій в ряд Фур'є.
24.  $2\pi$ -періодичне продовження функції. Розклад в ряд Фур'є кусково-диференційовних функцій, заданих на відрізку  $[a; b]$ , що повністю міститься у відрізку  $[0; \pi]$ . Приклади. Розклад в ряд Фур'є кусково-диференційовних функцій, заданих на відрізку  $[-l; l]$ . Приклади.
25. Середнє квадратичне відхилення двох функцій на відрізку. Приклад функцій, для яких середнє квадратичне відхилення не існує. Достатня умова існування середнього квадратичного відхилення. Формула для обчислення середнього квадратичного відхилення двох функцій на відрізку. Приклади.
26. Мінімальна властивість многочленів Фур'є.
27. Збіжність функціональних послідовностей в середньому та її зв'язок з поточною і рівномірною збіжністю. приклад функціональної послідовності, яка збігається на відрізку в середньому, але розбігається в кожній точці відрізка.
28. Збіжність в середньому рядів Фур'є функцій, інтегрованих за Ріманом на  $[-\pi; \pi]$ . Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.
29. Застосування рядів Фур'є для знаходження сум числових рядів (метод підстановки та метод використання рівності Парсеваля). приклади.
30. Узагальнені ряди Фур'є. Розклад функцій в узагальнені ряди Фур'є за довільною ортогональною системою функцій.
31. Еквівалентні (рівнопотужні) множини. приклади. Зчисленні множини: означення та приклади. Властивості зчислених множин. Зчисленність множин цілих, раціональних та алгебраїчних чисел.
32. Еквівалентні (рівнопотужні) множини. Приклади. Теорема про незчисленність множини точок відрізка  $[0,1]$ . Континуальні множини: означення та приклади. Континуальність наступних множин:  $(0; 1)$ ,  $(-\infty; \infty)$ , множини всіх ірраціональних чисел, множини всіх трансцендентних чисел.
33. Континуальні множини: означення та приклади. Континуальність множини всіх точок квадрата. Властивості континуальних множин. Континуальність множини всіх підмножин множини натуральних чисел. (Бажано: Континуальність множини всіх функцій, які неперервні на відрізку  $[a; b]$ ).
34. Теорема про потужність множини всіх підмножин довільної непорожньої множини. Гіперконтинуальні множини. Гіперконтинуальність множини всіх функцій, які визначені на відрізку  $[a; b]$ .
35. Поняття про континуум-гіпотезу Кантора. парадокс Рассела та його наслідки.
36. Простори  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  та їх узагальнення – простір  $\mathbb{R}^n$ . Нерівність Коші та наслідки з неї. Нерівність трикутника для простору  $\mathbb{R}^n$ . Властивості відстані в  $\mathbb{R}^n$ .
37. Поняття метрики та метричного простору. Приклади метричних просторів (з обґрунтуванням).
38. Окіл точки у метричному просторі. поняття відкритої та замкненої кулі. Класифікація точок метричного простору відносно даної множини (внутрішні, межові, зовнішні). Внутрішність, межа та замикання множини. Приклади. Внутрішність, межа та замикання для наступних множин:  $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $\{7\}$ , множина раціональних чисел відрізка  $[0, 1]$ , множина ірраціональних чисел відрізка  $[0, 1]$ , множина Кантора.
39. поняття відкритої множини. Властивості відкритих множин метричного простору. приклад зчисленої послідовності відкритих множин, перетин яких не є відкритою множиною. Множини типу  $G_\delta$ . поняття борелівської множини.
40. Замикання множини. Поняття замкненої множини. Властивості замкнених множин метричного простору. Приклад зчисленої послідовності замкнених множин, об'єднання яких не є замкненою множиною. Множини типу  $F_\delta$ . Поняття борелівської множини.