

Практичне заняття №5 з математичного аналізу (1МФІ)

Викладач - Слуцький Олександр Васильович

Тема: «Інтегрування алгебраїчних ірраціональностей»

Теоретичні відомості

Теорема 1 (Про підстановки Ейлера). Нехай задано інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Тоді цей інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції такими підстановками:

1. При $a > 0$ — підстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$
2. При $c > 0$ — підстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt$
3. При $a < 0, c \leq 0$ і $b^2 - 4ac > 0$ — підстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$, де α — корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Теорема 2 (Про біномний диференціал). Нехай задано інтеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

де $m, n, p \in \mathbb{Q}$ Тоді цей інтеграл обчислюється в скінченному вигляді тільки в трьох випадках:

1. При $p \in \mathbb{Z}$ — підстановкою $x = t^k$, де k — спільний знаменник чисел m, n ;
2. При $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ — підстановкою $a + bx^n = t^k$, де k — знаменник числа p ;
3. При $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ — підстановкою $ax^{-n} + b = t^k$, де k — знаменник числа p .

Домашнє завдання

1. Взяти інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

1) $\int \sqrt{x^2 + 3x + 2} dx$

2) $\int \sqrt{-x^2 + 3x + 2} dx$

3) $\int \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

4) $\int (x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}) dx$

5) $\int (x + \sqrt{-x^2 + 3x + 2}) dx$

6) $\int (x + \sqrt{-x^2 + 3x - 2}) dx$

7) $\int \sqrt{x^6 - x^4} dx$

8) $\int \sqrt{x^4 + x^2} dx$

9) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

10) $\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx$

11) $\int \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} dx$

12) $\int \frac{1}{(3x+5)\sqrt{2x-x^2}} dx$

13) $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$

14) $\int \frac{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$

2. Взяти інтеграли, використовуючи теорему про біномний диференціал:

1) $\int \frac{1}{x(1 + \sqrt[3]{x})^3} dx$

2) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3) $\int \frac{1}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} dx$

4) $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

5) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+2x^2}} dx$

6) $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$

7) $\int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx$

8) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} dx$

9) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}} dx$

10) $\int x^3\sqrt{1+x^2} dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^{15} + x^{14}}} dx$

12) $\int \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

3. Взяти інтеграли (різні приклади):

1) $\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}} dx$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{x})^3} dx$

3) $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x} dx$

4) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

5) $\int \sqrt[3]{x - x^3} dx$