

Практичне заняття №1 з диференціальних рівнянь (2ФМІ, 2ФІА)

Викладач - Слущкий Олександр Васильович

Тема: «Основні поняття диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння, розв'язані відносно похідної. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.»

Теоретичні відомості

Означення 1. Диференціальне рівняння - це рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком похідної. Якщо ця функція від однієї змінної, то диф. рівняння називається звичайним, якщо від багатьох змінних, то диф. рівняння називається диф. рівнянням з частинними похідними. Порядком диф. рівняння називають найвищий порядок похідної, що входить у дане рівняння.

Означення 2. Задачею Коші називається задача, де вимагається знайти таку функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння $f(x, y, y') = 0$ та умову $y(x_0) = y_0$, де x_0, y_0 - деякі числа.

Означення 3. Рівнянням, розв'язаним відносно похідної, називається рівняння виду $y' = f(x, y)$

Означення 4. Рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння, яке можна звести до рівняння виду $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Теорема 1. Нехай $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ - деяке рівняння з відокремлюваними змінними. Тоді його розв'язок знаходиться з умови

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int \frac{dx}{f_1(x)}$$

Домашнє завдання

1. (усно) Перевірити твердження:

- 1) $y' = xy' + y$ є звичайним диф. рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної
- 2) $y'' = xy' + y$ є звичайним диф. рівнянням другого порядку
- 3) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ є звичайним диф. рівнянням другого порядку
- 4) $z'_x + z''_{xy} = 0$ диф. рівнянням другого порядку з частинними похідними
- 5) Функція $y = 3x^2$ є розв'язком диф. рівняння $xy' - 2y = 0$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 3$

2. Перевірити, чи є задана функція розв'язком заданого диф. рівняння:

- 1) $yy' = x, y = x$
- 2) $y' - 3y = 0, y = 5e^{3x}$
- 3) $y'' = 2y' - y, y = e^{2x}$
- 4) $y'' = 2y' - y, y = e^x$
- 5) $y'' = -y, y = \sin(x) - \cos(x)$
- 6) $z''_{xy} = z, z = e^{x+y}$
- 7) $z''_{xy} = z, z = e^{x-y}$

3. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

- 1) $y' = x^2 \cdot y^2$
- 2) $y' = x^3 \cdot y^3$
- 3) $y' = e^{2x+3y}$
- 4) $y' = e^{4x-y}$
- 5) $x^2 y dx + x^3 dy = 0$
- 6) $\sqrt{xy} dx + x^2 y dy = 0$
- 7) $(y - x^2 y) dy = (x - xy^2) dx$
- 8) $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg}(x)$
- 9) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$
- 10) $y' = e^{x+y} \sin(x)$
- 11) $\sin(y) \cos(x) dx = \sin(x) \cos(y) dy$
- 12) $xy' = y \ln(y)$
- 13) $y' = \frac{y \ln(y)}{x}$. Чим відрізняються розв'язки цього рівняння та попереднього?

4. Розв'язати задачу Коші:

- 1) $y' = xy, y(0) = 3$
- 2) $y' = e^{x+y}, y(2) = 7$
- 3) $y' = e^y, y(3) = 9$
- 4) $\sin(y) \cos(x) dx = \sin(x) \cos(y) dy, y(0) = \pi/4$
- 5) $y' - 3y = 0, y(0) = 4$