

Практичне заняття №13 з диференціальних рівнянь (2ФМІ, 2ФІА)

Викладач - Слуцький Олександр Васильович

Тема заняття: «Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку»

Теоретичні відомості

Означення 1. Нехай x є змінна та декілька невідомих функцій від неї: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Нехай є деяка система рівнянь, причому до кожного з рівнянь входить змінна x , функції y_k та похідні першого порядку від цих функцій. Тоді цю систему називають «системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (СЗДРПП)».

Означення 2. Якщо СЗДРПП можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_k' = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

То її називають «нормальною СЗДРПП».

Зауваження 1. Для нормальної СЗДРПП є теорема про існування і єдиність розв'язку, яка практично аналогічна до теореми Коші.

Означення 3. Якщо у нормальній СЗДРПП у правих частинах є лінійні вирази зі сталими коефіцієнтами від невідомих функцій, то її називають лінійною СЗДРПП.

Зауваження 2. Найзручніший метод розв'язку лінійної СЗДРПП з n рівнянь — звести її до одного рівняння n -го порядку. Зазвичай це робиться за допомогою методу підстановки.

Приклад розв'язання лінійної СЗДРПП

Завдання. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} y' - 2z = 0 \\ z' + 3y = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Виразимо z з першого рівняння:

$$z = y' / 2$$

Підставимо результат у друге рівняння:

$$\begin{aligned} (y' / 2)' + 3y &= 0 \\ y'' / 2 + 3y &= 0 \\ y'' + 6y &= 0 \end{aligned}$$

Останнє рівняння є лінійним однорідним зі сталими коефіцієнтами. Тому його можна розв'язати за допомогою характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 6 &= 0 \\ \lambda_1 &= i\sqrt{6}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{6} \\ y_1 &= \cos(x \cdot \sqrt{6}), y_2 = \sin(x \cdot \sqrt{6}) \\ y &= C_1 \cos(x \cdot \sqrt{6}) + C_2 \sin(x \cdot \sqrt{6}) \end{aligned}$$

Тепер знайдемо z . Для цього згадаємо, як ми його виражали через y :

$$z = y' / 2$$

Знаючи вираз для y , маємо:

$$z = (C_1 \cos(x \cdot \sqrt{6}) + C_2 \sin(x \cdot \sqrt{6}))' / 2 = (-C_1 \sin(x \cdot \sqrt{6}) + C_2 \cos(x \cdot \sqrt{6}))\sqrt{6} / 2$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos(x \cdot \sqrt{6}) + C_2 \sin(x \cdot \sqrt{6}) \\ z &= (-C_1 \sin(x \cdot \sqrt{6}) + C_2 \cos(x \cdot \sqrt{6}))\sqrt{6} / 2 \end{aligned}$$