Практичне заняття №2 з математичного аналізу (2МФІ, 2МІА)

Викладач - Слуцький Олександр Васильович

Літучка (15 хв)

Варіант 1	Варіант 2
1) Знайти міру Жордана в $\mathbb{R}^1$ множини $E = [3;5) \cup [8;12]$ **2)** Знайти міру Жордана в $\mathbb{R}^2$ множини $E = \{(x,y) : x \in [0;2] \cap \mathbb{Q}, y \in [2;5]\}$ **3)** Довести, що множина E є вимірною за Жорданом в $\mathbb{R}^2$, якщо E - п'ятикутник.	**1)** Знайти міру Жордана в $\mathbb{R}^1$ множини $E = [3;5] \cup (8;12]$ **2)** Знайти міру Жордана в $\mathbb{R}^2$ множини $E = \{(x,y) : x \in [0;2] \cap \mathbb{R}, y \in [2;5]\}$ **3)** Довести, що множина E є вимірною за Жорданом в $\mathbb{R}^2$, якщо E - шестикутник.

Тема: «Інтеграл Рімана в $\mathbb{R}^2$. Суми Дарбу. Інтеграли Дарбу. Класи інтегровних функцій.»

Теоретичні відомості

Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ - множина, вимірна за Жорданом, а $f(x,y)$ - деяка функція, визначена на E. Нехай T - розбиття множини E на вимірні за Жорданом множини $E_1, E_2, \ldots, E_n$, причому $\lambda(T) = \max_i \operatorname{mes}(E_i)$. Нехай $M_i = \max\{f(x,y) : (x,y) \in E_i\}$, $m_i = \min\{f(x,y) : (x,y) \in E_i\}$.

***Означення* 1.** *Сума $S(f,E,T,C) := \sum_i \operatorname{mes}(E_i) \cdot f(C_i)$, де $C_i \in E_i$ називається інтегральною сумою для функції f та розбиття T.*
Сума $\overline{S}(f,E,T) := \sum_i \operatorname{mes}(E_i) \cdot M_i$ називається верхньою сумою Дарбу для функції f та розбиття T.
Сума $\underline{S}(f,E,T) := \sum_i \operatorname{mes}(E_i) \cdot m_i$ називається нижньою сумою Дарбу для функції f та розбиття T.

***Означення* 2.** *Границя $\iint_E f(x,y)\,dxdy := \lim_{\lambda \to 0} S(f,E,T,C)$ називається інтегралом від функції f по множині E за умови, що ця границя не залежить від розбиття T та вибору точок C_i.*
Границя $\overline{I}(f,E) := \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}(f,E,T)$ називається верхнім інтегралом Дарбу від функції f по множині E.
Границя $\underline{I}(f,E) := \lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(f,E,T)$ називається нижнім інтегралом Дарбу від функції f по множині E.

***Теорема* 1** (Критерій інтегровності)**.** *Функція є інтегровною на множині E тоді і тільки тоді, її верхній та нижній інтеграли Дарбу співпадають.*

***Теорема* 2** (Необхідна умова інтегровності)**.** *Нехай $\operatorname{mes}(E) \neq 0$. Тоді для того, щоб функція була інтегровна на E, необхідно, щоб вона була обмежена на цій множині.*

***Теорема* 3** (Достатня умова інтегровності 1)**.** *Для того, щоб функція була інтегровна на вимірній за Жорданом множині E, достатньо, щоб вона була неперервна і обмежена на цій множині.*

***Теорема* 4** (Достатня умова інтегровності 2)**.** *Для того, щоб функція була інтегровна на вимірній за Жорданом множині E, достатньо, щоб множина її точок розриву мала Жорданову міру нуль.*

Домашнє завдання

1. Нехай $E = [0;2] \times [0;3]$, а T - розбиття множини E на квадрати розміром 1×1. Знайти $\underline{S}(f,E,T), \overline{S}(f,E,T)$, а також таку інтегр. суму S, яка не співпадає з сумами Дарбу, якщо:
   1) $f = x + y$ **2)** $f = x - y$ **3)** $f = x^2$ **4)** $f = x^2 + y^2$
   5) $f = y^2$ **6)** $f = xy$ **7)** $f = 1$ при раціональних x та y і 0 в іншому випадку
   8) $f = 2$ при ірраціональних x та y і 0 в іншому випадку
2. Знайти верхній та нижній інтеграли Дарбу для вказаних функцій на множині $E = [-1;1] \times [-2;2]$. Якщо функція інтегровна, то знайти інтеграл Рімана: **1)** $f = 1$ при раціональних x та y і 0 в іншому випадку
   2) $f = 2$ при ірраціональних x та y і 0 в іншому випадку **3)** $f = 3$ **4)** $f = 5$ **5)** $f = \operatorname{sign}(x)$
   6) $f = \operatorname{sign}(y)$
3. Перевірити, чи є функція f інтегровною на множині E **1)** $f = x + y, \quad E = [1;3] \times [2;5]$
   2) $f = x - y, \quad E = [1;3] \times [2;5]$ **3)** $f = \sin(xy), \quad E = [0;\pi] \times [0;1]$ **4)** $f = \cos(xy), \quad E = [0;\pi] \times [0$
   5) $f = \frac{1}{xy}, \quad E = [1;3] \times [2;5]$ **6)** $f = \frac{1}{xy}, \quad E = [-1;3] \times [2;5]$ **7)** $f = \frac{1}{xy}, \quad E = [2;3] \times [2;4]$
   8) $f = \frac{1}{x+y}, \quad E = [2;3] \times [2;-1]$ **9)** $f = \frac{1}{x+y}, \quad E = [2;3] \times [2;-5]$ **10)** $f = 1$ при $x = 0$ і $f = 2$ при x
   11) $f = \operatorname{sign}(x), E = [-2;3] \times [2;5]$ **12)** $f = \operatorname{sign}(y), E = [2;3] \times [2;-5]$