Практичні заняття з математичного аналізу для 2МЕІ
Модуль 1 «Ряди Фур'є»

Слуцький О.В.

2016–2017 навчальний рік

Зміст

1 Ряди Фур'є на [-π;π] 2
1.1 Означення та теореми, що використовуються в цій темі . . . 2
1.2 Завдання, що зустрічаються в цій темі . . . 2
1.2.1 Розклад лінійних функцій в ряд Фур'є . . . 2
1.2.2 Розклад многочленів в ряд Фур'є . . . 3
1.2.3 Розклад показникових функцій в ряд Фур'є . . . 3
1.2.4 Розклад кусково заданих функцій в ряд Фур'є . . . 3
1.2.5 Розклад функцій в ряд Фур'є за синусами або за косинусами . . . 4

2 Ряди Фур'є на [-L;L] 5
2.1 Означення та теореми, що використовуються в цій темі . . . 5
2.2 Завдання, що зустрічаються в цій темі . . . 5

3 Штучні методи розкладу функцій в ряд Фур'є; використання рядів Фур'є для точного (не наближеного) знаходження сум рядів 6
3.1 Означення та теореми, що використовуються в цій темі . . . 6
3.2 Завдання, що зустрічаються в цій темі . . . 7
3.2.1 Розклад тригонометричних функцій у ряд Фур'є штучними методами: простіші випадки . . . 7
3.2.2 Розклад тригонометричних функцій у ряд Фур'є штучними методами: складніші випадки . . . 7
3.2.3 Розклад многочленів у ряд Фур'є . . . 7
3.2.4 Почленне інтегрування рядів Фур'є . . . 7
3.2.5 Знаходження точних сум деяких числових рядів за допомогою рядів Фур'є . . . 8

Заняття 1

Ряди Фур'є на [-п;п]

1.1 Означення та теореми, що використовуються в цій темі

Означення 1.1. Тригонометричним рядом називається ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

Означення 1.2. Рядом Фур'є для деякої функції $f(x)$, інтегровної на проміжку $[-\pi;\pi]$ називається такий тригонометричний ряд, коефіцієнти якого обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Ці формули називаються формулами Фур'є, а коефіцієнти — коефіцієнтами Фур'є.

***Теорема* 1.1.** *Якщо для деякої функції $f(x)$ існує тригонометричний ряд, що є рівномірним збіжним до неї, то цей ряд єдиний, і коефіцієнти цього ряду співпадають з коефіцієнтами, обчисленими за формулами Фур'є для вказаної функції.*

***Теорема* 1.2.** *Якщо функція $f(x)$ є кусково-диференційовною на відрізку $[-\pi;\pi]$, то її ряд Фур'є в кожній точці x_0 збігається і має суму $S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, де $f(x_0+0)$ — це границя функції $f(x)$ в точці x_0 справа, а $f(x_0-0)$ — границя зліва.*

1.2 Завдання, що зустрічаються в цій темі

1.2.1 Розклад лінійних функцій в ряд Фур'є

Задача 1. Розкласти функцію $f(x) = x$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

Нагадаємо, що інтеграли виду $\int_a^a f(x)\,dx$ дорівнюють нулю при непарній функції $f(x)$. В даному випадку функція $y = x$ — непарна, $y = \cos(nx)$ — парна, і тому їх добуток непарний. Отже,

$$a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx.$$

Нагадаємо, що інтеграли виду $\int x\sin(nx)\,dx$ (і такі самі інтеграли з косинусами) беруться за допомогою інтегрування частинами. Отже, беремо невизначений інтеграл за формулою $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int x\sin(nx)\,dx = \left|u = x, dv = \sin(nx)\,dx, v = -\frac{1}{n}\cos(nx), du = dx\right| =$$
$$= x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right) - \int\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)dx =$$
$$= -\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n}\int\cos(nx)dx = -\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx) + C$$

Підставляючи межі, маємо:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + 0 + \frac{-\pi}{n}\cos(n(-\pi)) - 0\right)$$

Врахувавши, що $\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n$ отримуємо

$$b_n = -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Відповідь:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}(-1)^n\sin(nx)$$

□

Задача 2. Розкласти функцію $f(x) = 3x + 2$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$.

1.2.2 Розклад многочленів в ряд Фур'є

Зауваження 1.1. Многочлен — це сума різних степенів змінної x. Інтегрування виразу $x^k\sin(nx)$ (при $k\in\mathbb{N}$) зводиться до інтегрування частинами k разів. Отже розв'язування задач з цього розділу зводиться до розв'язування задач з попереднього розділу, тільки є трохи довшим.

Задача 3. Розкласти функцію $f(x) = x^2 + 1$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$.

Задача 4. Розкласти функцію $f(x) = x^3 + x$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$.

1.2.3 Розклад показникових функцій в ряд Фур'є

Зауваження 1.2. Інтеграли виду $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ та $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ називаються «круговими інтегралами» і мають конкретний спосіб взяття (він описаний в підручник Шкіля, перша частина, стор. 295–297).

Задача 5. Розкласти функцію $f(x) = e^x$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$.

Задача 6. Розкласти функцію $f(x) = 2^x$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$. (Підказка: використайте заміну $2^x = e^{x\cdot\ln 2}$).

1.2.4 Розклад кусково заданих функцій в ряд Фур'є

Означення 1.3. Функція називається кусково заданою на відрізку $[a;b]$, якщо на різних частинах цього відрізка функція задається різними аналітичними виразами.

Зауваження 1.3. Приклади кусково заданих функцій на $[-\pi;\pi]$:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ при } x\in[0;\pi] \\ -x \text{ при } x\in[-\pi;0) \end{cases} \qquad \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x\in(0;\pi] \\ 0 \text{ при } x = 0 \\ -1 \text{ при } x\in[-\pi;0) \end{cases}$$

Задача 7. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \operatorname{sign} x$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ непарна, то $a_0 = a_n = 0$. Знайдемо b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} x \sin(nx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$
$$= \frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n - ((-1)^n - 1)\right) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Відповідь:

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin(nx).$$

□

Задача 8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = |x|$.

Задача 9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = \begin{cases} 2 \text{ при } x \in [-\pi; 1] \\ 3 \text{ при } x \in [1; \pi] \end{cases}$.

Задача 10. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in [-\pi; 0] \\ x \text{ при } x \in [0; \pi] \end{cases}$.

1.2.5 Розклад функцій в ряд Фур'є за синусами або за косинусами

Задача 11. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = e^x$ на $[0; \pi]$: а) за синусами; б) за косинусами.

Розв'язання. **а) За синусами**

Для того, щоб у розкладі заданої функції були лише синуси, треба, щоб вона була непарною. Тому довизначимо задану функцію на $[-\pi; 0)$ так, щоб вона була непарною:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ при } x \in [0; \pi] \\ -e^{-x} \text{ при } x \in [-\pi; 0) \end{cases}$$

Отже, завдання «розкласти функцію в ряд Фур'є за синусами» було зведене до «розкласти кусково задану функцію в ряд Фур'є». Далі це завдання виконується так, як це описано у відповідному пункті.

б) За косинусами

Для того, щоб у розкладі заданої функції були лише косинуси, треба, щоб вона була парною. Тому довизначимо задану функцію на $[-\pi; 0)$ так, щоб вона була парною:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ при } x \in [0; \pi] \\ e^{-x} \text{ при } x \in [-\pi; 0) \end{cases}$$

Отже, завдання «розкласти функцію в ряд Фур'є за косинусами» було зведене до «розкласти кусково задану функцію в ряд Фур'є». Далі це завдання виконується так, як це описано у відповідному пункті. □

Задача 12. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x + 1$ на $[0; \pi]$: а) за синусами; б) за косинусами.

Заняття 2

Ряди Фур'є на [-L;L]

2.1 Означення та теореми, що використовуються в цій темі

Означення 2.1. Рядом Фур'є для деякої функції $f(x)$ на проміжку $[-L; L]$ називається такий тригонометричний ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{\pi n}{L} x \right),$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{\pi n}{L} x\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{\pi n}{L} x\, dx$$

2.2 Завдання, що зустрічаються в цій темі

Задача 1. Записати для $y = x$ ряд Фур'є на проміжках $[-1; 1]$, $[-2; 2]$, $[-\pi; \pi]$, $[-L; L]$.

Задача 2. Записати для $y = |x|$ ряд Фур'є на проміжках $[-1; 1]$, $[-2; 2]$, $[-\pi; \pi]$, $[-L; L]$.

Задача 3. Розкласти функцію $y = \operatorname{sign} x$ на проміжку $[0; 4]$ в ряд Фур'є: а) за синусами; б) за косинусами.

Задача 4. Розкласти функцію $y = x + 1$ на проміжку $[0; 6]$ в ряд Фур'є: а) за синусами; б) за косинусами.

Заняття 3

Штучні методи розкладу функцій в ряд Фур'є; використання рядів Фур'є для точного (не наближеного) знаходження сум рядів

3.1 Означення та теореми, що використовуються в цій темі

***Теорема* 3.1.** *Якщо існує тригонометричний ряд, що рівномірно збігається до інтегровної функції $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$, то цей ряд єдиний і він співпадає з рядом Фур'є для вказаної функції.*

***Теорема* 3.2** (Про розклад у ряд Фур'є деяких стандартних функцій)**.** *Наступні рівності є істинними:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}(-1)^n \sin(nx)$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

$$\operatorname{sign}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(1-(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$$

***Теорема* 3.3** (Про перетворення добутків тригонометричних функцій на суму)**.**

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha - \cos 3\alpha)$$

***Теорема* 3.4.** *Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну, то її ряд Фур'є рівномірно збігається до неї.*

***Наслідок* 3.1.** *Ряд Фур'є можна почленно інтегрувати*

3.2 Завдання, що зустрічаються в цій темі

3.2.1 Розклад тригонометричних функцій у ряд Фур'є штучними методами: простіші випадки

Задача 1. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = 4\sin 3x + 7\cos 5x$.

Відповідь: $a_5 = 7, b_3 = 4$, інші коефіцієнти дорівнюють нулю. □

Задача 2. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = \sin 2x$.

3.2.2 Розклад тригонометричних функцій у ряд Фур'є штучними методами: складніші випадки

Задача 3. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = \sin^2 x$.

Розв'язання. Перетворимо вираз для $f(x)$, скориставшись формулами для перетворення добутку тригонометричних функцій на суму:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

З останнього виразу видно, що

Відповідь: $a_0 = 1$(якщо незрозуміло, чому не $\frac{1}{2}$, дивіться означення тригонометричного ряду), $a_2 = \frac{1}{2}$, інші коефіцієнти =0. □

Задача 4. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = \sin(3x)\cos(5x)$.

Задача 5. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = 8\sin^3 x - 4\cos^2 x$.

3.2.3 Розклад многочленів у ряд Фур'є

Задача 6. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$.

Розв'язання. Випишемо потрібні нам рівності з теореми про розклад у ряд Фур'є деяких стандартних функцій:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}(-1)^n \sin(nx)$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

З цих рівностей маємо:

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 7 = 3 \cdot \left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)\right) + 5 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}(-1)^n \sin(nx)\right) - 7$$

З останнього виразу отримуємо відповідь:

Відповідь: $a_0 = (\pi^2 - 7) \cdot 2$, $a_n = \frac{12}{n^2}(-1)^n$, $b_n = \frac{-10}{n}(-1)^n$. □

Задача 7. Виписати значення для a_0, a_n, b_n у розкладі в ряд Фур'є для функції $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$.

3.2.4 Почленне інтегрування рядів Фур'є

Задача 8. Використовуючи почленне інтегрування рядів Фур'є, записати ряд Фур'є на $[-\pi; \pi]$ для таких функцій:

1. $f(x) = x^2$;
2. $f(x) = x^3$;
3. $f(x) = x^4$.

3.2.5 Знаходження точних сум деяких числових рядів за допомогою рядів Фур'є

Задача 9. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot (-1)^n}{n^2}$$

Розв'язання. Позначимо шукану суму через S.

Аналізуючи теорему про розклад у ряд Фур'є деяких стандартних функцій, можемо побачити, що якщо у рівність

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

підставити значення $x = 0$, то отримається наступна рівність:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4S.$$

Відповідь: $S = -\frac{\pi^2}{12}$. □

Задача 10. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Задача 11. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

(Підказка: підставити $x = \frac{\pi}{2}$ у ряд Фур'є для функції $f(x) = x$)